(δεύτερη ανισότητα) προσθέτουμε μια θετική ποσότητα. Έτσι βρίσκουμε τελικά ότι η τυπική μορφή του δοθέντος π.γ.π. είναι:

$$-max\ z = -x_1 - 5x_2 + 10x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} x_1' - x_1'' - x_2 &= 2 \\ x_1' - x_1'' - x_2 - 3x_3' - x_4 &= 2 \\ 2x_1' - 2x_1'' - 3x_2 - x_3' + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_1',\ x_1'',\ x_2\ , x_3'\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

□

3.5.4 Η μέθοδος Simplex περιγραφικά

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, από μαθηματικής σκοπιάς ο γραμμικός προγραμματισμός περιγράφει ένα μοντέλο, το οποίο αφορά στη μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης υπό κάποιους γραμμικούς περιορισμούς. Σημειώνουμε ότι η πρώτη ενέργεια που πρέπει να κάνουμε προκειμένου να εφαρμόσουμε την μέθοδο Simplex είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημά μας σε τυπική μορφή. Στην συνέχεια μέσα από ένα παράδειγμα περιγράφουμε τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου Simplex η οποία στηρίζεται σε γραμμοπράξεις.

Παράδειγμα 3.5.4. Έστω το απλό παράδειγμα 3.3.1 (ερώτημα 1.) που έχουμε ήδη επιλύσει γραφικά. Το π.γ.π. (αν αντικαταστήσουμε τα x και y με x_1 και x_2, αντίστοιχα) είναι:

$$max\ z = 6x_1 + 7x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Λύση. Κατ' αρχήν μετατρέπουμε το πρόβλημά μας σε τυπική μορφή:

$$max\ z = 6x_1 + 7x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

που για λόγους διευκόλυνσης ξαναγράφεται ως:

$$max\ z = 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= 12 \\ 2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= 8 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Πρώτα απ' όλα **εντοπίζουμε μία βάση της λύσης**. Με τον όρο βάση της λύση ενός π.γ.π. εννοούμε εκείνα τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ της στήλης του x_j που έχουν συντεταγμένες $(1, 0, 0, ..., 0)$, $(0, 1, 0, ..., 0)$, ..., $(0, 0, ..., 0, 1)$, δηλαδή εκείνες τις στήλες από τα x_j που σχηματίζουν τον $n \times n$ μοναδιαίο πίνακα.

Στις απλές περιπτώσεις όπως στην παρούσα, όπου υπεισέρχονται περιθώριες μεταβλητές σε περιορισμούς με ανισότητες που είναι όλες $\leq$, είναι απλό να εντοπίσουμε την βάση αυτή αφού εμφανίζεται κατ' ευθείαν ο μοναδιαίος πίνακας. Ως πρώτη βάση λοιπόν επιλέγουμε το διάνυσμα (x_3, x_4) το οποίο και τοποθετούμε στην πρώτη στήλη.

Στην δεύτερη στήλη (c_B) τοποθετούνται οι συντελεστές των αντίστοιχων στοιχείων της βάσης όπως αυτοί εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση. Στην προκειμένη περίπτωση ο συντελεστής του x_3 είναι μηδέν όπως και του x_4 (Η αντικειμενική συνάρτηση είναι $z = 6 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$).

Στην τρίτη στήλη (x_B) τοποθετείται ο πίνακας b της τυπικής μορφής, δηλαδή όλοι οι αριθμοί δεξιά των ισοτήτων. Στις επόμενες στήλες τοποθετούμε όλους τους συντελεστές των μεταβλητών όπως αυτές εμφανίζονται στο σύστημα περιορισμών της τυπικής μορφής. Στην κορυφή του πίνακα και πάνω από κάθε

μεταβλητή x_i τοποθετούμε τους συντελεστές (c_j) με τους οποίους εμφανίζονται οι μεταβλητές αυτές στην αντικειμενική συνάρτηση. Τέλος στην τελευταία στήλη τοποθετούμε τον λόγο ϑ τον οποίο θα δούμε παρακάτω πως τον υπολογίζουμε.

Το αντίστοιχο ταμπλό της μεθόδου Simplex (μέχρι στιγμής) είναι το εξής:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_3	0	12	2	3	1	0	κ_6
x_4	0	8	2	1	0	1	κ_7
	z	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	

Οι κενές θέσεις που πρόκειται να συμπληρώσουμε σημειώνονται με κ_i. Παρακάτω περιγράφεται πως συμπληρώνονται οι κενές (κ_i) θέσεις του ταμπλό.

κ_1**:** Στην θέση αυτή υπολογίζεται η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης z η οποία είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων c_B και x_B. Έχουμε $z = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 = 0$.

κ_i, $i = 2, \ldots, 5$**:** Οι αντίστοιχες τιμές των κ_i είναι η διαφορά του συντελεστή c_i από το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων κάτω από την στήλη x_i με το διάνυσμα c_B, δηλαδή $\kappa_i = c_i - x_i \cdot c_B$. Έχουμε λοιπόν ότι $\kappa_2 = 6 - (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 6$, $\kappa_3 = 7 - (3 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 7$, $\kappa_4 = 0 - (1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0$, $\kappa_5 = 0 - (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 0$.

Σημειώνεται ότι **πάντα** τα παραπάνω υπολογισμένα στοιχεία στις στήλες των στοιχείων της βάσης (εδώ στις θέσεις κ_4 και κ_5), όπου εμφανίζεται ο μοναδιαίος πίνακας, θα είναι **μηδέν**. (Αποδεικνύεται με σχετικό θεώρημα που δεν παρατίθεται εδώ). Έτσι, το ταμπλό μέχρι στιγμής έχει πάρει την μορφή:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	x_4	ϑ
x_3	0	12	2	3	1	0	κ_6
x_4	0	8	2	1	0	1	κ_7
	z	0	6	**7**	0	0	

Στην συνέχεια εξετάζουμε ποια από τις υπολογισμένες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη. Αυτή είναι το στοιχείο στην θέση κ_3 που βρίσκεται στη στήλη της μεταβλητής x_2. Σε αυτήν την φάση καθορίζουμε ως **εισερχόμενη μεταβλητή στην βάση** την μεταβλητή $\mathbf{x_2}$. Οι θέσεις κ_6 και κ_7 καθορίζονται από την στήλη x_B και την στήλη της εισερχόμενης μεταβλητής και είναι ο λόγος των αντίστοιχων στοιχείων των διανυσμάτων x_B και x_2. Αν ο λόγος αυτός είναι αρνητικός ή δεν υπάρχει (όταν «διαιρούμε» με μηδέν) σημειώνουμε παύλα (−) στην αντίστοιχη θέση. Έχουμε δηλαδή $\kappa_6 = 12/3 = 4$ και $\kappa_7 = 8/1 = 8$.

Το **πρώτο ταμπλό SIMPLEX** είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	$\mathbf{x_2}$	x_3	x_4	ϑ
x_3	0	12	2	**3**	1	0	**4**
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	**7**	0	0	

Ως **εξερχόμενη μεταβλητή από την βάση** ορίζουμε την μεταβλητή της βάσης με το μικρότερο ϑ. Σε αυτή την περίπτωση η x_3 έχει το μικρότερο ϑ που είναι ίσο με 4. Ως **οδηγό στοιχείο** ορίζουμε το στοιχείο της γραμμής που βρίσκεται η εξερχόμενη μεταβλητή (γραμμή του x_3) και της στήλης που βρίσκεται η εισερχόμενη μεταβλητή (στήλη του x_2). Συνεπώς εδώ το οδηγό στοιχείο είναι το 3.

Στην συνέχεια, για να προχωρήσουμε στην κατασκευή του νέου ταμπλό, στην πρώτη στήλη της βάσης αντικαθιστούμε την εξερχόμενη μεταβλητή (x_3) με την εισερχόμενη (x_2). Στην πρώτη στήλη c_B τοποθετούμε τους αντίστοιχους συντελεστές με τους οποίους εμφανίζονται τα στοιχεία της νέας πλέον βάσης στην αντικειμενική συνάρτηση. Εδώ αλλάξαμε μόνο το πρώτο στοιχείο (x_2) οπότε στην πρώτη θέση βάζουμε το 7. Μέχρι στιγμής το ταμπλό έχει την μορφή:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7						
x_4	0						
	z						

Οι γραμμοπράξεις που θα εκτελούμε στη συνέχεια δεν θα αφορούν στα στοιχεία των στηλών c_B και θ αλλά σε όλα τα υπόλοιπα.

Προκειμένου να εκτελέσουμε την πρώτη γραμμοπράξη έχουμε κατά νου ότι **το οδηγό στοιχείο πρέπει να γίνει μονάδα**. Συνεπώς διαιρούμε όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής με το 3 και το ταμπλό λαμβάνει την μορφή.

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	**1**	1/3	0	
x_4	0	–	–	–	–	–	–
	z	–	–	–	–	–	

Στην συνέχεια θέλουμε, εκτελώντας την δεύτερη γραμμοπράξη, **το στοιχείο κάτω από το οδηγό να γίνει μηδέν**. Πολ/ζουμε λοιπόν την πρώτη γραμμή του προηγούμενου ταμπλό με -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη γραμμή του πρώτου ταμπλό Simplex που είχαμε καταλήξει. Έχουμε λοιπόν:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	
x_4	0	-4+8=4	-2/3+2=4/3	-1+1=0	-1/3+0=-1/3	-0+1=1	–
	z	–	–	–	–	–	

Το ταμπλό τώρα έχει γίνει:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	κ_6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	κ_7
	z	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις τιμές στα κενά κ_i όπως κάναμε παραπάνω. Για το κενό κ_1 έχουμε ότι $\kappa_1 = 7 \cdot 4 + 0 \cdot 4 = 28$, η οποία και είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Έχουμε επίσης ότι: $\kappa_2 = 6 - (2/3 \cdot 7 + 4/3 \cdot 0) = 6 - 14/3 = 4/3$, $\kappa_3 = 0$ (θυμίζουμε ότι πάντα θα έχουμε 0 στις στήλες των στοιχείων της βάσης που σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα). $\kappa_4 = 0 - (1/3 \cdot 7 - 1/3 \cdot 0) = -7/3$, $\kappa_5 = 0$. Συνεπώς το ταμπλό γίνεται:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	κ_6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	κ_7
	z	28	**4/3**	0	-7/3	0	

Παρατηρούμε τώρα ότι μεταξύ των υπολογισμένων τιμών στις θέσεις κ_i η μεγαλύτερη θετική τιμή είναι εκείνη που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_1. Συνεπώς η **εισερχόμενη μεταβλητή στην βάση** είναι η x_1. Διαιρούμε λοιπόν με τα στοιχεία της στήλης x_1 τα αντίστοιχα στοιχεία της x_B και υπολογίζουμε τους αντίστοιχους λόγους της στήλης ϑ. Έχουμε $\kappa_6 = 4/(2/3) = 6$ και $\kappa_7 = 4/(4/3) = 3$. Συνεπώς,

το **δεύτερο ταμπλό SIMPLEX** είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	**4/3**	0	-1/3	1	**3**
	z	28	4/3	0	-7/3	0	

Έχουμε λοιπόν ότι η εισερχόμενη μεταβλητή στην βάση είναι η x_1 και η εξερχόμενη είναι η x_4 δεδομένου ότι σε αυτήν αντιστοιχεί η μικρότερη τιμή του λόγου ϑ. Αντικαθιστούμε λοιπόν στην πρώτη στήλη της βάσης το x_4 με το x_1. Στην στήλη c_B τοποθετούμε και τον αντίστοιχο συντελεστή. Επιπλέον, θέλουμε το οδηγό στοιχείο να γίνει 1, οπότε πολ/ζουμε όλη την δεύτερη γραμμή με 3/4 και έχουμε μέχρι στιγμής το εξής ταμπλό:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	
x_1	6	3	**1**	0	-1/4	3/4	
	z	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5	

Στην συνέχεια πολ/ζουμε με (-2/3) την δεύτερη γραμμή του ανωτέρω ταμπλό και την προσθέτουμε στην πρώτη. Υπολογίζουμε επίσης, με τον τρόπο που εξηγήσαμε παραπάνω, τα στοιχεία στις κενές θέσεις του πίνακα $\kappa_1 \sim \kappa_5$. Τελικά έχουμε

το **τρίτο ταμπλό SIMPLEX** είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	2	0	1	1/2	-1/2	
x_1	6	3	1	0	-1/4	3/4	–
	z	32	0	0	-2	-1	

Το οποίο είναι και το τελικό.

Η **διαδικασία τερματίζεται** όταν στην γραμμή του z οι υπολογισμένες ποσότητες για τις αντίστοιχες μεταβλητές x_i είναι < 0, κάτι που συμβαίνει στην περίπτωσή μας.

Στις περιπτώσεις όπου εμφανίζονται τα μηδενικά σε στήλες **διαφορετικές** από αυτές που σχηματίζουν τον μοναδιαίο πίνακα (στην περίπτωσή μας θα ήταν στην στήλη του x_3 ή του x_4) είτε η λύση του π.γπ. δεν υπάρχει είτε έχουμε άπειρες λύσεις (και όχι μόνο μία βέλτιστη). Με τέτοιες περιπτώσεις δεν θα ασχοληθούμε στο παρόν πόνημα.

Η **κορυφή της άριστης λύσης** δίνεται από τα στοιχεία της στήλης x_B και από την πρώτη στήλη απ' όπου βλέπουμε τα στοιχεία της βάσης. Από τα στοιχεία της στήλης της βάσης **δεν λαμβάνουμε υπ' όψη τις περιθώριες μεταβλητές**. Αν δεν υπάρχουν κάποιες βασικές μεταβλητές στα στοιχεία της βάσης, όταν ψάχνουμε την κορυφή της άριστης λύσης θέτουμε την αντίστοιχη τιμή τους ως μηδέν. Παρατηρώντας τις δύο στήλες έχουμε ότι $x_1 = 3$ και $x_2 = 2$, συνεπώς η άριστη λύση είναι στην κορυφή $(3, 2)$. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, που έχει υπολογιστεί στο ταμπλό και βρίσκεται στην γραμμή του z κάτω από την στήλη των x_B, είναι ίση με 32. Παρατηρούμε φυσικά ότι βρήκαμε την ίδια λύση με εκείνη που είχαμε βρει γραφικά στο παράδειγμα 3.3.1 (ερώτημα 1.).

□

3.5.5 Γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου Simplex

Προκειμένου να κατανοήσουμε γεωμετρικά τι συμβαίνει όταν εφαρμόζουμε την μέθοδο SIMPLEX υιοθετούμε το προηγούμενο παράδειγμα το οποίο έχουμε λύσει ήδη και γραφικά. Η γραφική επίλυση παρατίθεται εκ νέου στο σχήμα 3.10. Πρώτα παρατηρούμε το πρώτο ταμπλό SIMPLEX που βρήκαμε προηγουμένως και είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_3	0	12	2	**3**	1	0	4
x_4	0	8	2	1	0	1	8
	z	0	6	7	0	0	

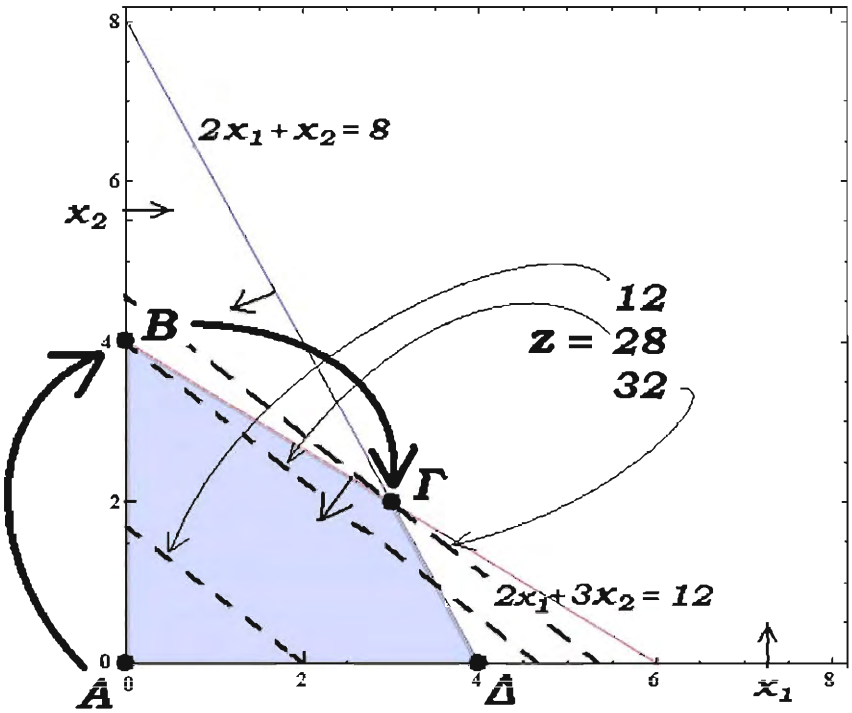
Παρατηρούμε ότι ξεκινάμε με βάση x_3, x_4. Αυτές είναι και οι δύο περιθώριες μεταβλητές, συνεπώς ξεκινάμε από την κορυφή $(x_1, x_2) = A(0,0)$. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης σε αυτή την κορυφή είναι $z = 0$. Στην συνέχεια παρατηρούμε το δεύτερο ταμπλό SIMPLEX το οποίο είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	4	2/3	1	1/3	0	6
x_4	0	4	4/3	0	-1/3	1	3
	z	28	4/3	0	-7/3	0	

Η βάση μας τώρα είναι η x_2, x_4. Σε αυτήν την περίπτωση λαμβάνουμε υπ' όψη μας την x_2 που δεν είναι περιθώρια και έχει αντίστοιχο $x_B = 4$. Οπότε η κορυφή της λύσης μας είναι η $(x_1, x_2) = B(0,4)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι στο πρώτο ταμπλό οι τιμές του z_j για τις μεταβλητές x_1 και x_2 είναι 6 και 7, αντίστοιχα. Αυτό που υπολογίσαμε ουσιαστικά είναι το ποσοστό αύξησης της αντικειμενικής συνάρτησης κατά τις διευθύνσεις x_1 και x_2 και τεκμαίρεται ότι το ποσοστό αύξησης της z είναι μεγαλύτερο κατά την διεύθυνση της x_2. Πράγματι, αν παρατηρήσουμε το σχήμα 3.10 βλέπουμε ότι από το σημείο $A(0,0)$ αν κινηθούμε πάνω στον x_1 άξονα (οπότε $x_2 = 0$) συναντάμε στο σημείο $x_1 = 2$ την $z = 6 \cdot 2 + 7 \cdot 0 = 12$. Αν όμως κινηθούμε από το $A(0,0)$ πάνω στον x_2 άξονα (οπότε $x_1 = 0$)συναντάμε την ίδια τιμή $z = 12$ στο σημείο $x_2 = 12/7 \approx 1.71$, σε μικρότερη δηλαδή απόσταση από το $(0,0)$ από ότι αν κινηθούμε πάνω στον x_1 άξονα.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Simplex κινηθήκαμε από την μία κορυφή του εφικτού χωρίου $A(0,0)$ στην άλλη $B(0,4)$. Για την δεύτερη κορυφή υπολογίσαμε



Σχήμα 3.10: Εφικτό χωρίο και αντικειμενική συνάρτηση $6x_1+7x_2$ για $z = 12,\ 28$ και 32.

την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης η οποία είναι $z = 28$ (Βλέπε και σχήμα 3.10).

Από το δεύτερο ταμπλό διαπιστώνουμε ότι πρέπει να κινηθούμε και προς την διεύθυνση της x_1 μεταβλητής αφού η «κλίση» κατά την x_1 μεταβλητή είναι 4/3, (στήλη x_1 και γραμμή z), η μεγαλύτερη θετική από όλες τις άλλες μεταβλητές. Το τρίτο ταμπλό Simplex είναι:

		c_j	6	7	0	0	
Βάση	c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	ϑ
x_2	7	2	0	1	1/2	-1/2	–
x_1	6	3	1	0	-1/4	3/4	–
	z	32	0	0	-2	-1	

Παρατηρώντας το τρίτο ταμπλό διαπιστώνουμε, ότι η βάση μας αποτελείται από τις μεταβλητές x_1 και x_2, και τα στοιχεία του διανύσματος x_B δίνουν την νέα κορυφή του εφικτού χωρίου στην οποία μετακινηθήκαμε και που είναι η $(x_1, x_2) = \Gamma(3, 2)$. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γι' αυτήν την κορυφή, είναι $z = 32$ (βλέπε και σχήμα 3.10). Αν παρατηρήσουμε την γραμμή όπου βρίσκεται το z βλέπουμε ότι οι υπολογισμένες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης για τις μεταβλητές x_i είναι μηδέν ή μικρότερες από το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι σε **οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν κινηθούμε** οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης θα μειωθούν. Άρα έχουμε φτάσει στην κορυφή με την άριστη λύση.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι χρησιμοποιώντας την μέθοδο SIMPLEX αυτό που κάνουμε είναι ουσιαστικά να κινούμαστε από την μία κορυφή του εφικτού χωρίου στην άλλη μέχρι να βρούμε κορυφή που μας δίνει την άριστη λύση.

3.5.6 Τεχνητές μεταβλητές

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι όταν οι περιορισμοί δίνονται υπό μορφή ανισοτήτων που είναι όλες της μορφής $<$ σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας μέσα στον πίνακα A της τυπικής μορφής και είναι εύκολη η έναρξη της μεθόδου SIMPLEX. Υπάρχει όμως περίπτωση να μην σχηματίζεται ο μοναδιαίος πίνακας και να μην μπορούμε να ξεκινήσουμε την διαδικασία. Σε αυτήν την περίπτωση μετασχηματίζουμε το π.γ.π. σ' ένα ισοδύναμο που να περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα και φυσικά να διατηρείται στην τυπική μορφή. Οι περιορισμοί σχηματίζονται από τους περιορισμούς του αρχικού π.γ.π. όπου έχουμε πιθανόν προσθέσει μία αρνητική μεταβλητή. Οι χειρισμοί που μπορούμε να κάνουμε σε αυτήν την περίπτωση καταδεικνύονται μέσω του επόμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα 3.5.5. Να επιλυθεί το π.γ.π.

$$min\ z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$